



TITLE:

# On Dirichlet Problems for Some Degenerate Elliptic Equations (位相解析的方法による偏微分方程式論の研究)

AUTHOR(S):

中岡, 明

---

CITATION:

中岡, 明. On Dirichlet Problems for Some Degenerate Elliptic Equations (位相解析的方法による偏微分方程式論の研究). 数理解析研究所講究録 1971, 121: 83-100

ISSUE DATE:

1971-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106482>

RIGHT:

# On Dirichlet problems for some degenerate elliptic equations

立命大 理工 中岡 明

## §1. 序

退化した楕円型方程式に対する境界値問題は、数多くの研究がなされているが、その一つの特徴的な困難さは、退化していない場合と比較して、統一的な取り扱いができないことである。例えば、次の二つの方程式を  $\mathbb{R}_+^1$  で考えよう。

$$(1.1) \quad -p(x)u'' + u = f(x)$$

$$(1.2) \quad -(p(x)u')' + u = f(x)$$

ここで、 $p(x)$  は非負で有界、そして  $x=0$  のみで  $p(x)=0$  となるものとする。もしも、 $f(x) \in L^2(\mathbb{R}_+^1)$  とし、解  $u \in L^2(\mathbb{R}_+^1)$  の subspace で求めるとすると、(1.2) に対しては、 $u(x)$  及び  $\sqrt{p(x)}u'(x)$  が  $L^2(\mathbb{R}_+^1)$  に属するようなものを求めるのが“自然”であろう。そしてこの時、結果として  $(p(x)u')' \in L^2(\mathbb{R}_+^1)$  となる。さて、 $p(x)$  を  $x=0$  の近傍で  $\sqrt{x}$  に等しい関数とし、 $u(x)$  も  $x=0$  の近傍で  $\sqrt{x}$  に等しく、かつその support が有界な関数とすると

明かに,  $u(x)$ ,  $\sqrt{p(x)}u'(x)$ , そして  $(p(x)u')'$  は  $L^2(\mathbb{R}_+')$  に属するが,  $p(x)u''(x)$  は  $x=0$  の近傍で  $x^{-1}$  であるから,  $L^2(\mathbb{R}_+')$  には属さない。このことは, (1.1) と (1.2) とを同じ関数空間でとり扱うことは適当でないことを suggest している。従って, 退化した方程式を考える場合には, その方程式にうまく attach した関数空間を選ぶ必要がある。

さて,  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の中の half-space 又は smooth な compact hypersurface で囲まれた領域としよう。我々は主として,  $\Omega$  で定義された次のような 2 階の微分作用素  $A(x, D)$  を考える。即ち  $A(x, D)$  は, おのおの十分小なる boundary patch において

(1.3)  $A(x, D) = - \sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x) \partial_j \partial_k + \text{first order operator,}$   
と表わされるものとする。ただし, ここで

$$(1.4) \quad \sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x) \xi_j \bar{\xi}_k \geq C |\xi|^2 \quad \xi = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

$$(C > 0, \quad \tilde{a}_{jk} = \overline{\tilde{a}_{kj}})$$

であり,  $\partial_0 = p(r) \frac{\partial^{(*)}}{\partial v}$ ,  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$  ( $j=1, 2, \dots, n-1$ ) である。又,  $r = r(x)$  は,  $x \in \Omega$  から,  $\Omega$  の境界  $\Gamma$  への距離である。  $p$  については, §2 で詳しく述べる。

(\*)  $\frac{\partial}{\partial v}$  と  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  ( $j=1, 2, \dots, n-1$ ) は次のようにして定義する。  
 $\forall x_0 \in \Gamma$  に対して,  $x_0$  を原点として,  $\Gamma$  上に一つの curvilinear coordinate system  $\sigma(\Gamma)$  を考える。ここで,  $x_0$  の

十分小さい近傍  $V(x_0)$  を考えよ,  $\forall x \in V(x_0)$  に対し, 唯つの実数  $y$  が,  $\Gamma$  上に存在して,  $\vec{y}x$  が,  $y$  における normal vector に一致する。次に  $\Gamma_r = \{x \in V(x_0); \text{ ~~the~~ } |\vec{y}x| \leq r\}$  とおき,  $\Gamma_r$  には,  $\Gamma = \Gamma_0$  の coordinate system  $\sigma(\Gamma)$  によって induce された coordinate system  $\sigma(\Gamma_r)$  が定義されているものとする。ここで, local coordinate  $(v, \tau_1, \dots, \tau_{n-1})$  を  $x \in V(x_0) \cap \Gamma_r$  ( $r \geq 0$ ) に対し次のように定める。

$$(1.5) \begin{cases} v = |\vec{y}x| \\ \tau_j = \text{the } j\text{-th coordinate of } x \text{ through } \sigma(\Gamma_r). \end{cases}$$

従って  $x = (x_1, \dots, x_n)$  として

$$(1.6) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial v} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial \tau_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial \tau_j} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \end{cases}$$

である。

我々は, ここで, ある weight をもった Sobolev space において, Dirichlet problem に対する解の存在及び, その時の lower order terms について考察する。

§2. Half-space  $\mathbb{R}_+^n$  における weighted Sobolev spaces.

我々の問題を扱う空間を設定するには, まず  $\mathbb{R}_+^n$  における

それから考えた方が便利である。そこで、 $\mathbb{R}_+^n$  にお<sup>ける</sup>~~ける~~ weighted Sobolev spaces を導入しよう。

$p(x)$  は次のような real-valued function としよう。

$$i) \quad p(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^1) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}_+^1})$$

$$ii) \quad 0 \leq p(x) \leq M \quad \text{"} p(x) \text{ は } x=0 \text{ のみで } 0 \text{ になる。}$$

$$iii) \quad C_1 x^\alpha \leq p(x) \leq C_2 x^\alpha \quad \text{かつ} \quad |p^{(m)}(x)| \leq C_m x^{\alpha-m}$$

$$(m=1, 2, \dots) \text{ が } x=0 \text{ の近傍で成り立つ。} \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$iv) \quad 0 < \gamma \leq p(x) \quad \text{かつ} \quad |p^{(m)}(x)| \leq K_m \quad (m=1, 2, \dots)$$

$$\text{が } x \rightarrow \infty \text{ のとき成り立つ。}$$

さて、 $p(x)$  を  $x < 0$  に対しては、 $p(-x)$  で拡張し、その拡張された関数を  $\tilde{p}(x)$  であらわす。又、 $\phi(x)$  及び  $\tilde{\phi}(x)$  は次の式によって定義する。

$$(2.1) \quad \phi(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{p(\xi)}$$

$$(2.2) \quad \tilde{\phi}(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\tilde{p}(\xi)}.$$

定義 2.1.  $\mathbb{R}_+^n = \{(x, y); x > 0, y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$  上の distribution  $u(x, y)$  が  $W^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  ~~に~~ に属しているとは

$$(2.3) \quad \|u\|_{m, \phi}^2 = \sum_{j+|k| \leq m} \int_{\mathbb{R}_+^n} |D_p^j D_y^k u|^2 d\phi dy$$

が有限の場合を云う。ただし、 $D_p = -i p(x) \frac{\partial}{\partial x}$  であり

$D_y^k = (-i)^{|k|} \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}\right)^{k_{n-1}}$  であり,  $m$  は <sup>非負</sup> 整数である。

定義 2.2.  $\mathbb{R}^n$  上の distribution  $u(x, y)$  が  $W^m(\mathbb{R}^n, \tilde{\phi})$  に属しているとは,

$$(2.4) \quad \|u\|_{m, \tilde{\phi}}^2 = \sum_{j+|k| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |D_{\tilde{\rho}}^j D_y^k u|^2 d\tilde{\phi} dy$$

が有限の場合を云う。ただし,  $D_{\tilde{\rho}} = -i\tilde{\rho}(x)\frac{\partial}{\partial x}$  である。

明らかに,  $W^m(\mathbb{R}_+, \phi)$  及び  $W^m(\mathbb{R}^n, \tilde{\phi})$  は, (2.3) 及び (2.4) によって Hilbert spaces を作る。又, 自然な制限によって  $W^m(\mathbb{R}^n, \tilde{\phi}) \subset W^m(\mathbb{R}_+, \phi)$  である。

$W^m(\mathbb{R}_+, \phi)$  については, 通常の Sobolev space と同様の性質を示すことが出来る。即ち

命題 2.1.  $u(x, y) \in W^m(\mathbb{R}_+, \phi)$  とすると,  $D_{\tilde{\rho}}^j D_y^k u$  ( $j+|k| \leq m$ ) の trace  $D_{\tilde{\rho}}^j D_y^k u(0, y) = \lim_{x \downarrow 0} D_{\tilde{\rho}}^j D_y^k u(x, y)$  が  $H^{m-j-|k|-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$  の中に存在して

$$(2.5) \quad |D_{\tilde{\rho}}^j D_y^k u(0, \cdot)|_{m-j-|k|-\frac{1}{2}} \leq \text{const} \|u\|_{m, \phi}$$

$$(2.6) \quad |D_{\tilde{\rho}}^j D_y^k u(0, \cdot)|_s \leq \text{const} (\varepsilon \|u\|_{m, \phi} + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \phi})$$

( $s < m-j-|k|-\frac{1}{2}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ )

がなりたつ。

命題 2.2. 1)  $u(x, y)$  と  $D_p^m u(x, y)$  が  $W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  に属しているとする。  $D_p^k u(x, y)$  ( $1 \leq k \leq m-1$ ) も  $W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  に属しており

(2.7)  $\|D_p^k u\|_{0, \phi} \leq C(k, m) (\varepsilon \|D_p^m u\|_{0, \phi} + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \phi})$  が  $\forall \varepsilon > 0$  に對して成り立つ。

2) もしも,  $D_y^k u$  ( $|k| \leq m$ ) と  $D_p^m u$  とが  $W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  に属しているとする。  $u \in W^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  であり,  $\forall \varepsilon > 0$  に對して

$$(2.8) \quad \sum_{|j|+|k| < m} \|D_p^j D_y^k u\|_{0, \phi} \leq \varepsilon \sum_{|j|+|k| = m} \|D_p^j D_y^k u\|_{0, \phi} + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \phi}$$

が成り立つ。

次の補題は、低階の項を扱うのに重要である。

補題 2.1.  $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  で  $\alpha < 1/3$  とする。このとき,  $\frac{\partial u}{\partial x} \in W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  であり  $\forall \varepsilon > 0$  に對して

$$(2.9) \quad \|\partial u / \partial x\|_{0, \phi} \leq \varepsilon \|u\|_{2, \phi} + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \phi}$$

が成り立つ。

Remark もしも  $\alpha \geq 1/3$  とすると,  $\partial u / \partial x \notin W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  となるような  $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  がある。例之は,  $x=0$  の近傍で,  $\phi(x) g(y)$  ( $g(y) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ ) に等しいような関数を考えればよい。

定義 2.3.  $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  の  $W^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  での completion を  $W_0^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  で表わす。

次の命題は, 命題 2.1. より 明かである。

命題 2.3.  $u(x, y) \in W_0^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  とする。このとき,  
 $D_p^j D_y^k u$  ( $j+|k| \leq m-1$ ) の trace は全て 0 である。

さて,  $D_p$  は  $W_0^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  の内積に関して, formally self-adjoint であるが,  $-\lambda \frac{\partial}{\partial x}$  のそれは

$$(2, 10) \quad -\lambda \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda) p' p^{-1}$$

で与えられる。そして  $p' p^{-1}$  は  $x=0$  の近傍で  $x^{-1}$  の order である。次の補題がなりたつ。

補題 2.2. もしも  $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}_+^n, \phi) \cap W_0^1(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  で  $\alpha < 1/3$  ならば,  $u/x \in W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  であり,  $\forall \varepsilon$  に対して

$$(2, 11) \quad \|u/x\|_{0, \phi} \leq \varepsilon \|u\|_{2, \phi} + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \phi}$$

がなりたつ。更に,  $\alpha \geq 1/3$  なら  $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}_+^n, \phi) \cap W_0^1(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  で  $u/x \notin W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  なるものがある。

補題 2.3.  $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}_+^n, \phi) \cap W_0^1(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  とする。

もしも,  $\beta < 1-\alpha$  ならば,  $x^{-\beta} \frac{\partial u}{\partial y_j}$  ( $j=1, 2, \dots, n-1$ )  $\in W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  であり,  $\forall \varepsilon > 0$  に対して



(2, 12)  $\|x^{-\beta} \frac{\partial u}{\partial y_j}\|_{0, \phi} \leq \varepsilon \|u\|_{2, \phi} + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \phi}$   
 がなりたつ。

最後に、一つの関数の族を導入する。

定義 2.4.  $\alpha(x, y) \in \beta^m(\mathbb{R}_+^n, \rho)$  であるとは、  
 $D_p^j D_y^k \alpha(x, y)$  ( $j+|k| \leq m$ ) がすべて連続で有界である時  
 をいう。

Remark.  $\beta^m(\mathbb{R}_+^n, \rho)$  は十分に沢山の要素をもっている。  
 実際  $\alpha(x, y) \in \beta^m(\mathbb{R}_+^n)$  とすれば、 $\alpha(\phi(x), y) \in \beta^m(\mathbb{R}_+^n)$   
 であり、 $\varphi(x, y) + \text{const} \in \beta^m(\mathbb{R}_+^n, \rho)$  ( $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ ) である。

§3. 一般の領域  $\Omega$  における weighted Sobolev spaces.

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の中の領域とし、その境界は smooth で compact な  
 hypersurface とする。まず、次の定義から始めよう。

定義 3.1.  $\omega$  を  $\Omega$  の境界の某の十分小さい closed  
 neighbourhood とし、 $\omega$  では、 $\frac{\partial}{\partial \nu}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \tau}$  が定義されて  
 いるものとする。 $\omega$  上の関数  $\alpha(x)$  が  $\beta^m(\omega, \rho)$  に属し  
 ているとは、 $(\rho(r) \frac{\partial}{\partial \nu})^j (\frac{\partial}{\partial \tau})^k \alpha(x)$  ( $j+|k| \leq m$ ) が  
 全て有界連続である場合を云う。

Remark.  $\alpha(x) \in \beta^m(\omega, \rho)$  は、例えば、次のようにして作ら

れる。  $\alpha(v, \tau) \in \beta^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$  とし、その support は十分小さいとする。

$a(x) = \alpha \circ \theta^{-1}(v, \tau)$  とかくと  $a(x) \in \beta^m(\omega, \rho)$  である。ただし

$\theta^{-1}$  は、(1.5) で定義された  $\theta; x \rightarrow (v, \tau)$  の逆変換である。

さて、 $\bar{\Omega}$  の finite covering  $\{\omega_p\}$  で、次のようなもの  $\varepsilon$  とする。

1)  $\bar{\Omega}$  の境界  $\Gamma$  に contact <sup>する</sup> ~~near~~ covering neighborhood (これを  $\omega_\lambda^*$  で表わす) については、十分小なる  $\varepsilon > 0$  に對して

$$\bigcup_{\lambda} \omega_{\lambda}^* \supset \bar{\Omega}_{\varepsilon}$$

2) inner coverings (これを  $\tilde{\omega}_{\mu}$  で表わす) については、

$$\bigcup_{\mu} \tilde{\omega}_{\mu} \subset \bar{\Omega}_{\varepsilon/2}$$

ただし、 $\bar{\Omega}_{\varepsilon} = \{x \in \bar{\Omega}; \text{dis}(x, \Gamma) < \varepsilon\}$  である。そして

次のような  $\bar{\Omega}$  上の partition of unity  $V_{\varepsilon}$  とする。

1)  $\text{supp. } \varphi_{\lambda}^* \subset \omega_{\lambda}^*$ ,  $\text{supp. } \tilde{\varphi}_{\mu} \subset \tilde{\omega}_{\mu}$ ,  $\{\varphi_{\lambda}^*\} \cup \{\tilde{\varphi}_{\mu}\}$

ただし、 $\tilde{\omega}_{\lambda}^*$  については  $\partial/\partial v$ ,  $\partial/\partial \tau$  が define されているとする。

2)  $\sum \varphi_{\lambda}^{*2} + \sum \tilde{\varphi}_{\mu}^2 = 1$ ,  $\varphi_{\lambda}^* \in \beta^{\infty}(\bar{\omega}_{\lambda}^*, \rho)$ ,  $\tilde{\varphi}_{\mu} \in C^{\infty}(\tilde{\omega}_{\mu})$ .

定義 3.2.  $\bar{\Omega}$  上の distribution  $u(x)$  が  $W^m(\Omega, \rho)$  に属しているとは、

$$(3.1) \quad \|u\|_{m, \rho, \Omega}^2 = \sum_{j+|k| \leq m} \sum_{\lambda} \int_{\Omega} \left| \left( \rho(r) \frac{\partial}{\partial v} \right)^j \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^k (\varphi_{\lambda}^* u) \right|^2 \frac{dx}{\rho(r)} \\ + \sum_{|l| \leq m} \sum_{\mu} \int_{\Omega} \left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^l (\tilde{\varphi}_{\mu} u) \right|^2 \frac{dx}{\rho(r)}$$

が有限の場合を云う。

Remark, (3, 1) で与えられた ノルム は,  $\varepsilon$  や 単位 の 分解 の 送り方 に depend するが, 他 の 送り方 を しても, 同 等 の ノルム を 与 える の で,  $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$  で もって, 任 意 に 固 定 さ れ た  $W^m(\Omega, p)$  の topology を 表 わ す こと に す る。

又,  $W_0^m(\Omega, p)$  で もって  $C_0^\infty(\Omega)$  の  $W^m(\Omega, p)$  での comp-  
-bition を 表 わ す こと に す る。明 示 か に,  $W^m(\Omega, p)$  及 び  $W_0^m(\Omega, p)$   
は,  $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$  に よ っ て Hilbert space に な る。

(1.5) で 定 義 さ れ た 変 換 を 考 へ る こと に よ っ て, 次 の 命 題 や 補 題 が 得 ら れ る。

命 題 ~~3.1~~ <sub>3</sub>,  $\forall u(x) \in W^m(\Omega, p)$  ~~に 対 し て~~  $D^\beta u(x)$   
( $|\beta| < m$ ) は  $\Gamma$  へ の trace  $\gamma D^\beta u \in H^{m-|\beta|-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  を も ち。

$$(3, 2) \quad |\gamma D^\beta u|_{m-|\beta|-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq \text{const} \|u\|_{m,p,\Omega}$$

$$(3, 3) \quad |\gamma D^\beta u|_{s,p} \leq \varepsilon \|u\|_{m,p,\Omega} + C(\varepsilon) \|u\|_{0,p,\Omega}$$

$$(s < m - |\beta| - \frac{1}{2}, \quad \forall \varepsilon > 0)$$

が な り た つ。

補 題 ~~3.1~~ <sub>3</sub>,  $u(x) \in W^2(\Omega, p)$  ( $\alpha < \frac{1}{3}$ ) と す る と,  
 $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in W^0(\Omega, p)$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) と あり,  $\forall \varepsilon > 0$  に 対 し て

$$(3, 4) \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{0,p,\Omega} \leq \varepsilon \|u\|_{2,p,\Omega} + C(\varepsilon) \|u\|_{0,p,\Omega}$$

が な り た つ。

補題 3.2,  $u(x) \in W^2(\Omega, p) \cap W_0^1(\Omega, p)$  ( $\alpha < 1/3$ )  
 とする。  $u/r(x) \in W^0(\Omega, p)$  であり,  $\forall \varepsilon > 0$  に対して

$$(3.5) \quad \|u/r\|_{0,p,\Omega} \leq \varepsilon \|u\|_{2,p,\Omega} + C(\varepsilon) \|u\|_{0,p,\Omega}$$

がなりたつ。

補題 3.3,  $u(x) \in W^2(\Omega, p) \cap W_0^1(\Omega, p)$  とする。各  $\omega_\lambda^*$  に対して,  $\beta < 1-\alpha$  のとき  $\forall \varepsilon > 0$  に対して

$$(3.6) \quad \int_{\omega_\lambda^* \cap \Omega} \left| r^{-\beta} \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \frac{dx}{p(r)} \leq \varepsilon \|u\|_{2,p,\Omega} + C(\varepsilon) \|u\|_{0,p,\Omega}$$

がなりたつ。

§4 Dirichlet problems. さて, 次の方程式を考へよう。

$$(4.1) \quad \begin{cases} Au \equiv - \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u \\ = f(x) \in W^0(\Omega, p) \\ u|_P = 0 \end{cases}$$

ここで,  $A$  は, 各  $\omega_\lambda^*$  において, 次のように表わされるとする。

$$(4.2) \quad A = - \sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x) \partial_j \partial_k + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{b}_j(x) \partial_j + \tilde{c}_0(x) \frac{\partial}{\partial v} \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{c}_j(x) r^{-\beta} \partial_j + \tilde{d}_0(x) \frac{1}{r} + d(x)$$

ただし,  $\sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq c|\xi|^2$ , ( $\beta < 1-\alpha$ ) ( $\tilde{a}_{jk} = \overline{\tilde{a}_{kj}}$ )

であり, 各係数については,  $\tilde{a}_{jk} \in \beta^3(\omega_\lambda^*, p)$ ,  $\tilde{b}_j(x), \tilde{c}_j(x) \in \beta^1(\omega_\lambda^*, p)$

( $j=0, 1, \dots, n-1$ ) かつ  $\tilde{d}_0(x), \tilde{d}(x) \in \beta^0(\omega_\lambda^*, \rho)$  とする。

Dirichlet problem を扱うには、いわゆる Gårding の不等式が重要な働きをするが、そのために次の補題を準備する。

補題 ~~4.4~~ <sup>4.1</sup>  $u(x) \in W_0^1(\Omega, \rho)$  とし、 $\alpha < 1/2$  とする。

この時  $\forall \varepsilon > 0$  に対して

$$(4.3) \quad \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} u \right| \frac{dx}{\rho(r)} \leq \varepsilon \|u\|_{1, \rho, \Omega}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \rho, \Omega}^2 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$(4.4) \quad \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{r} \frac{dx}{\rho(r)} \leq \varepsilon \|u\|_{1, \rho, \Omega}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \rho, \Omega}^2$$

$$(4.5) \quad \int_{\omega_\lambda^* \cap \Omega} r^{-\beta} \left| \frac{\partial u}{\partial r} u \right| \frac{dx}{\rho(r)} \leq \varepsilon \|u\|_{1, \rho, \Omega}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \rho, \Omega}^2 \quad (\beta < 1 - \alpha)$$

がなりたつ。

補題 ~~4.4~~ <sup>4.1</sup> を使って、次の命題を示すことができる。

命題 ~~4.4~~ <sup>4.1</sup> (Gårding の不等式) 作用素  $A$  の principal part の係数は  $C^1(\Omega)$ 、その他は  $C^0(\Omega)$  に属しているものとする。更に (4.2) において、 $\tilde{a}_{jk}(x) \in \beta^1(\omega_\lambda^*, \rho)$ 、 $\tilde{b}_j(x)$ 、 $\tilde{c}_j(x)$ 、 $\tilde{d}_0(x)$ 、 $\tilde{d}(x) \in \beta^0(\omega_\lambda^*, \rho)$  とする。このとき、 $\forall u(x) \in W_0^1(\Omega, \rho)$  ( $\alpha < 1/2$ ) に対して、正の定数  $C$  と  $K$  があって

$$(4.6) \quad \operatorname{Re} \langle Au, \bar{u} \rangle_{\rho, \Omega} \geq C \|u\|_{1, \rho, \Omega}^2 - K \|u\|_{0, \rho, \Omega}^2$$

がなりたつ。ここで、 $\langle, \rangle_{\rho, \Omega}$  は  $W_0^1(\Omega, \rho)$  の内積より induce された  $W_0^1(\Omega, \rho)' \times W_0^1(\Omega, \rho)$  上の sesqui-linear

form である。又,  $\alpha \geq 1/2$  とすると, (4-6) は一般に成り立たない。

定義 4.1.  $u(x) \in W_0'(\Omega, p)$  ( $\alpha < 1/2$ ) が全ての  $v(x) \in W_0'(\Omega, p)$  ( $\alpha < 1/2$ ) に對して

$$(4.7) \quad \langle \overline{A^*v}, u \rangle_{p, \Omega} = \langle f, v \rangle_{p, \Omega}$$

をみたしてゐるとき,  $u(x)$  は (4.1) の weak solution

という。ここで  $A^*$  は  $W^0(\Omega, p)$  の内積に関する formal adjoint である。

補題 4.2  $a_{j,k}(x) \in \beta^3(C\Omega_\delta)$ ,  $b_j(x) \in \beta^1(C\Omega_\delta)$   
 $c(x) \in \beta^0(C\Omega_\delta)$  ( $\delta > 0$ ) とし, 各  $\omega_\lambda^*$  に對して,  $\tilde{a}_{j,k}(x) \in \beta^3(\omega_\lambda^*, p)$   
 $\tilde{b}_j(x), \tilde{c}_j(x) \in \beta^1(\omega_\lambda^*, p)$  かつ  $\tilde{d}_0(x), \tilde{d}(x) \in \beta^0(\omega_\lambda^*, p)$  とする  
 と,  $A^*$  の係数は命題 4.1 の仮定をみたす。

以上をまとめると, Lax - Milgram の lemma によつて次の定理を得る。

定理 4.1.  $A$  の係数は, 補題 4.2 の仮定をみたしてゐるものとする。もし,  $\alpha < 1/2$  ならば,  $\forall f \in W_0'(\Omega, p)'$  に對して,  $\lambda > 0$  を十分大にとれば,

$$\begin{cases} Au + \lambda u = f \\ u|_p = 0 \end{cases}$$

は unique な weak solution をもつ。

次に  $f(x) \in W^0(\Omega, p)$  のとき, weak solution  $u(x)$  は

$W^2(\Omega, p)$  に属するか, という問題であるが, これは ~~無~~ 条件では  
なりたたない。実際 補題 3.1 及び 補題 3.2 からわかる  
ように  $\alpha < 1/3$  の場合には正しい。即ち 次の定理が成り立つ。

定理 4.2    もしも  $f(x) \in W^0(\Omega, p)$  であり,  $\alpha < 1/3$  なら  
ば, (4.1) の weak solution  $u(x)$  は  $W^2(\Omega, p)$  に属する。

この定理の証明は, 大体において, 退化していない楕円型  
方程式の解に対する differentiability を示す手法 ~~と~~ 同い  
であるが, 若干の注意を要する。詳しくは [4] 参照。

次に,  $f(x) \in W^s(\Omega, p)$  ならば, 解  $u(x)$  は  $W^{s+2}(\Omega, p)$   
に属するか, という問題があるが, これも一般には否定  
される。

次に  $\Omega$  が有界領域の場合, Fredholm's alternative  
theorem が成り立つ。実際 次の命題が成り立つからである。

命題 4.2.     $\Omega$  が有界のとき  $W_0^1(\Omega, p)$  の有界集合  
は  $W^0(\Omega, p)$  の precompact set を作る。

§ 5. 高階の方程式に対する Dirichlet problems.    高階  
の方程式に対する Dirichlet problem も 2 階の場合と analogous  
にとり扱うことができる。  $A$  を  $\Omega$  で定義された  $2m$  階  
の微分作用素として,  $\Omega$  の内部では楕円型とする。そして  
各 boundary patch で 次のように表わされるものとする。

$$(5.1) \quad A = \sum_{|\mu|=2m} \tilde{a}_\mu(x) \partial^\mu + \text{lower order operator.}$$

ここで,  $\partial = (p(r) \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tau_{n-1}})$  であり, 更に

$$(5.2) \quad (-1)^m \operatorname{Re} \sum_{|\mu|=2m} \tilde{a}_\mu(x) \xi^\mu \geq c |\xi|^{2m}$$

を仮定する。

我々の方程式は

$$(5.3) \quad \begin{cases} Au = f \in W^0(\Omega, p) \\ \left( (p(r) \frac{\partial}{\partial r})^j u \right) \Big|_r = 0 \quad (j=0, 1, \dots, m-1) \end{cases}$$

である。

定義 5.1.  $u(x) \in W_0^m(\Omega, p)$  は, すべての  $v(x) \in W_0^m(\Omega, p)$  に対して,

$$(5.4) \quad \langle \overline{A^* v}, u \rangle_{p, \Omega} = \langle f, v \rangle_{p, \Omega}$$

がなりたつとき, (5.3) の weak solution と云う。

補題 5.1.  $B(x, D) \in (2m-1)$  階の作用素とし,  $T$  の近傍<sup>(6)</sup>で, 次のように表わされるものとする。

$$(5.5) \quad B(x, D) = \sum_{j+|k| \leq 2m-1} \tilde{b}_{j, (k)}(x) \left( p(r) \frac{\partial}{\partial r} \right)^j \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^k + \\ + \sum_{\alpha+j+|k| \leq 2m-1} \tilde{c}_{\alpha, j, (k), \ell}(x) \left( p(r) \frac{\partial}{\partial r} \right)^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^j \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^{\ell-1+\beta} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^k \\ + \tilde{d}(x) \quad (\beta < 1-\alpha).$$

ただし,  $\tilde{b}_{j, (k)}(x) \in \beta^{3m-j-|k|-1}(\omega, p)$ ,  $\tilde{c}_{\alpha, j, (k), \ell}(x) \in \beta^{2m-\alpha-j-|k|-\ell}(\omega, p)$



そして  $d(x) \in C^0(\omega)$  かつ  $|d(x)| \leq Kr^{-2m+1}$  とする。このとき

$\alpha < \frac{1}{2}m$  ならば、 $\forall \varepsilon > 0$  に対して

$$(5.6) \begin{cases} \int_{\Omega} |Bu \cdot u| \frac{dx}{p} \leq \varepsilon \|u\|_{m,p,\Omega}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{0,p,\Omega}^2 \\ \int_{\Omega} |B^*u; u| \frac{dx}{p} \leq \varepsilon \|u\|_{m,p,\Omega}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{0,p,\Omega}^2 \end{cases}$$

がなりたつ。ここで  $\alpha \geq \frac{1}{2}m$  とするときは一般にできない。

命題 5.1.  $\tilde{a}_\mu(x) \in \beta^{3m}(\omega, p)$  とし, lower order term は補題 5.1 の条件をみたすものとし,  $A$  の係数は (簡単のため)  $C^{3m}(\Omega)$  に属しているものとする。このとき  $\alpha < \frac{1}{2}m$  ならば,

$$(5.7) \quad \operatorname{Re} \langle \overline{A^*u}, u \rangle_{p,\Omega} \geq C \|u\|_{m,p,\Omega}^2 - K \|u\|_{0,p,\Omega}^2$$

が、すべて  $u(x) \in W_0^m(\Omega, p)$  に対してなりたつ。

以上のことをまとめると、次の定理が得られる。

定理 5.1.  $A(x, D)$  は命題 5.1 の条件をみたしているものとする。このとき、 $\alpha < \frac{1}{2}m$  で、 $\lambda > 0$  が十分大とすれば、任意の  $f \in W_0^m(\Omega, p)'$  に対して

$$\begin{cases} Au + \lambda u = f \\ u \in W_0^m(\Omega, p) \end{cases}$$

の unique weak solution が存在する。

更に解の differentiability については、次の定理がなりたつ。

定理 5.2. 低階項  $B(x, D)$  は  $\Gamma$  の近傍で

$$(5.8) \quad B(x, D) = \sum_{j+|k| \leq 2m-1} \tilde{f}_{j,(k)}(x) \left( p(r) \frac{\partial}{\partial \nu} \right)^j \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \right)^k + \\ + \sum_{i+j+|k|+l \leq m} \tilde{c}_{i,j,(k),l}(x) \left( p(r) \frac{\partial}{\partial \nu} \right)^i \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \right)^j r^{-l+1-\beta} \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \right)^k \\ + \tilde{\alpha}(x)$$

と表わされるものとし、 $|\tilde{\alpha}(x)| \leq K r^{-m}$  とする。このとき

$\alpha < \frac{1}{2m+1}$  なら  $f(x) \in W^0(\Omega, p)$  ならば、~~weak~~ weak solution  $u(x)$  は  $W^{2m}(\Omega, p)$  に属する。ここで、 $\alpha \geq \frac{1}{2m+1}$  といふ一般にできない。

$\Omega$  が有界の場合には、Fredholm の alternative theorem がなりたつ。

### References

- [1] M. S. Baouendi : Sur une class d'operateurs elliptiques dégénérés. Thèse Paris 1966.
- [2] S. Mizohata : Theory of Partial Differential Equations. Iwanami Tokyo 1965. (in Japanese)
- [3] A. Nakaoaka : Boundary value problems for some degenerate elliptic equations of second order with Dirichlet condition, Proc. Japan Acad. vol 46

1970, 248 - 252

- [4] A. Nakaoaka : On Dirichlet problems for some degenerate elliptic equations. Journal of Math. of Kyoto Univ. vol 10, No 3, 1970 375 ~ 401
- [5] L. Nirenberg : Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. vol 8 1955 648 - 674
- [6] N. Shimakura : Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré. Journal of Math. of Kyoto Univ. vol 9, No. 2, 1969 275 - 335